

<https://doi.org/10.32762/zt.2025.4>

Eksperimentalno i teorijsko ispitivanje ploča s kružnom rupom pod jednoosnim vlačnim opterećenjem u linearnoj analizi

Experimental and theoretical investigation of plates with circular hole under uniaxial tension in linear analysis

Laura Grbac¹, Gordan Jelenić¹

(1) Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, laura.grbac@uniri.hr, gordan.jelenic@uniri.hr

Sažetak

Na temelju dostupne literature uočeno je da klasična teorija elastičnosti ne može s dovoljnom preciznošću opisati koncentraciju naprezanja u jednoosnoj rastegnutoj ploči s kružnom rupom, čak ni u linearnoj analizi homogenih uzoraka. Cilj ovog rada je istražiti razloge uočenih odstupanja i provjeriti može li klasična teorija adekvatno opisati razmatrani problem. U tu svrhu provedena su laboratorijska vlačna ispitivanja aluminijskih uzoraka s različitim promjerima kružnih rupa, pri čemu su deformacije praćene uz pomoć tenzometara. Prikazana je usporedba s analitičkim (Howlandovo rješenje) i numeričkim modelima. Dobivena odstupanja ukazuju na potrebu za daljnjim istraživanjem alternativnih pristupa.

Ključne riječi: koncentracija naprezanja, gradijent deformacije, tenzometarska mjerenja, eksperimentalna validacija.

Abstract

A review of the available literature reveals that the classical theory of elasticity does not describe stress concentration in a uniaxially loaded plate with a central circular hole with sufficient accuracy, even within the framework of linear analysis for homogeneous specimens. The main aim of this study is to explore the causes of these discrepancies and to assess whether the classical theory can adequately capture the problem under consideration. To this end, tensile tests were conducted on aluminium specimens with varying hole diameters, using strain gauges for strain measurements. A comparison is presented against both analytical predictions (Howland's solution) and numerical models. The observed gaps highlight the need for further investigation into alternative modelling approaches.

Keywords: stress concentration, strain gradient, strain gauge measurements, experimental validation.

1. Uvod

U konstrukcijskim elementima se nerijetko javljaju diskontinuiteti (poput rupa, zareza, naglih suženja i sl.), što uzrokuje lokalno povećanje naprezanja – poznato kao koncentracija naprezanja, koja se kvantificira faktorom koncentracije naprezanja, definiranim kao omjer maksimalnog naprezanja na rubu diskontinuiteta i nominalnog naprezanja.

Za inženjere je od iznimne važnosti točno predvidjeti vrijednost koncentracije naprezanja, jer se upravo na tim mjestima mogu pojaviti prva oštećenja. Stoga nije iznenađujuće da se ovaj problem već dugi niz godina analizira u različitim geometrijskim i materijalnim varijantama [1].

U literaturi se ističe razlika između teorijskih predviđanja i eksperimentalnih rezultata kod problema gdje se pojavljuju veliki gradijenti deformacije [2], npr. kod jednoosnog rastezanja ploče s kružnom rupom - u nelinearnom (plastičnom) režimu [3], ali ponekad i u linearnoj analizi [4].

1.1. Motivacija: zašto je vrijednost faktora koncentracije naprezanja bazirana na klasičnoj teoriji diskutabilna?

Ako se fokusiramo na problem s jednom kružnom rupom u simetričnoj izotropnoj elastičnoj ploči podvrgnutoj jednoosnom vlačnom naprezanju, složenost analitičkog rješenja znatno se razlikuje ovisno o tome razmatra li se ploča konačne širine (Howlandovo rješenje [5]) ili "beskonačne" širine (Kirschovo rješenje [6]). Kirschovo rješenje ne uzima u obzir omjer širine ploče d i promjera rupe w te predviđa konstantni faktor koncentracije naprezanja jednak 3. Međutim, u eksperimentalnim uvjetima ograničeni smo na ploče konačnih dimenzija, zbog čega je praktičnije eksperimentalno validirati Howlandovo rješenje (posebno kod uskih uzoraka) i predviđa nešto niže vrijednosti faktora koncentracije naprezanja u odnosu na Kirschovo rješenje.

U [4] je prikazan eksperiment na uskim uzorcima od kompozitnog materijala, uz korištenje beskontaktnih metode ESPI (Electronic Speckle Pattern Interferometry) te su rezultati uspoređeni s analitičkim rješenjem u linearnoj analizi za beskonačnu ploču (generalizirano za kompozitne materijale) i sa numeričkim rezultatima gdje su eksperimentalni rezultati u prosjeku manji od analitičkog rješenja za 60% a od numeričkih rezultata za oko 48%. Razlika je u radu pripisana isključivo nepreciznosti mjerne metode.

U [7] su provedena istraživanja broja i veličina rupa u izotropnim i ortotropnim pločama podvrgnutima jednoosnom rastezanju u okviru linearne analize gdje su deformacije mjerene uz pomoć tenzometra, a rezultati uspoređeni s numeričkim vrijednostima. Autori su pokazali da su najveće prosječno odstupanje upravo dobili za slučaj ploče s jednom kružnom rupom u izotropnoj ploči gdje su eksperimentalna mjerenja u prosjeku za 40% manja od numeričkog izračuna. S obzirom da u radu nedostaje opis metodologije usporedbe rezultata (npr. točna pozicija tenzometara na uzorku) teško je ustanoviti koji je uzrok te razlike.

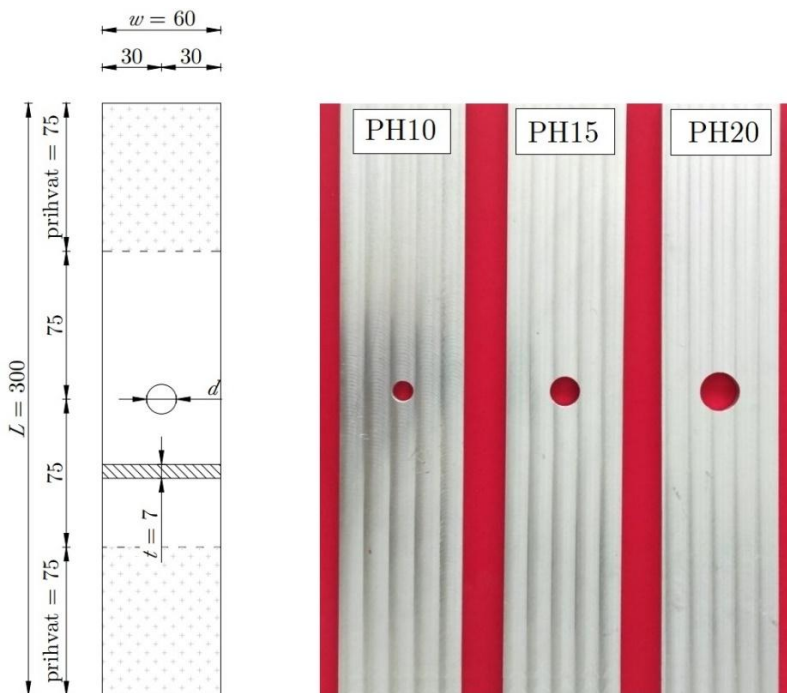
Manje vrijednosti koncentracije naprezanja dobivene eksperimentalno (oko manje 6% od numeričke linearne analize) prikazane su u [8], gdje autori ističu kako je vrlo teško precizno provesti mjerenja u području velikog gradijenta deformacije. Neki autori posebno naglašavaju da se odstupanja između klasične teorije elastičnosti i eksperimentalnih

rezultata javljaju upravo u problemima u kojima dolazi do velikih gradijenata deformacije [9], [10].

Literatura nam stoga pokazuje da su evidentirane manje vrijednosti naprezanja na rubu rupe te da je i krivulja raspodjele naprezanja u blizini rupe nešto drugačija od teorijskog predviđanja [2], [4], [7], [9]. Ipak, u radu [11], izneseno je da se eksperimentalni rezultati dobro podudaraju s teorijom u elastičnom rangu što nije slučaj kod plastičnog ponašanja, gdje je razlika u rezultatima pripisana isključivo nelinearnim efektima. Ova dva suprotstavljena pogleda motiviraju ovo istraživanje u kojem želimo pronaći odgovor na pitanje *Može li klasična linearna teorija elastičnosti dovoljno precizno opisati razmatrani problem i koja je metodologija primjerena za eksperimentalnu validaciju?*

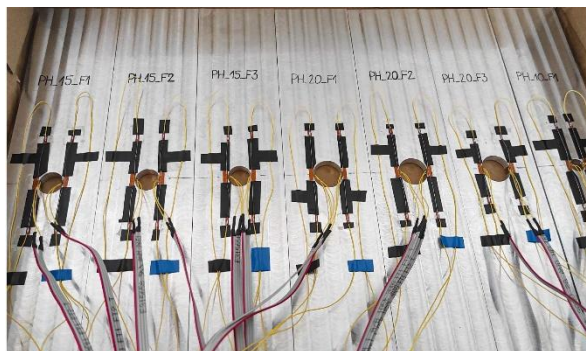
2. Metodologija laboratorijskog ispitivanja

Provedena su laboratorijska ispitivanja na skupu pravokutnih uzoraka od aluminijske legure EN-AW 6060 t66 s definiranim geometrijskim karakteristikama: duljina $L = 30$ mm, širina $w = 60$ mm i debljina $t = 7$ mm (Slika 1). Promjeri rupe po pojedinom tipu uzorka su $d = 10, 15$ i 20 mm, a uzorci su u skladu s promjerima označeni kao PH10- i , PH15- i te PH20- i , pri čemu $i = 1, 2, 3$ predstavlja redni broj pojedinog uzorka (tri komada za svaki tip uzorka). Modul elastičnosti $E = 67\,050.55$ MPa i Poissonov omjer $\nu = 0.3$ određeni su vlačnim ispitivanjem na epruvetama prema EN ISO 6892-1 normi.



Slika 1. Geometrijske karakteristike uzorka (lijevo) i reprezentativni primjerci svakog tipa uzorka (desno).

U svrhu mjerenja longitudinalne deformacije, na svaki očišćeni uzorak zalijepili su se tenzometri najmanje dostupne mjerne površine i to pod dva tenzometra (simetrično) na unutrašnjem obodu rupe (unutarnji tenzometri) i dva na površini uzorka neposredno pored mjesta najveće koncentracije deformacije (prosječna udaljenost od sredine vanjskih tenzometra i ruba rupe je 0.64 mm). Svih devet uzoraka podvrgnuto je jednoosnom vlačnom ispitivanju na Zwick/Roell Z600 kidalici koristeći hidraulične čeljusti. Maksimalna nanesena sila $F = 20$ kN je određena za sve uzorke kao sila koja neće proizvesti nikakvo plastično deformiranje uzoraka u točkama najveće koncentracije naprezanja. Pomaci na površini uzoraka dodatno su praćeni optičkim mjerenjem pomoću kamera, a snimke su obrađene u programu GOM Aramis Professional 2020 primjenom metode digitalne korelacije slike (DIC). Ipak, dobiveni rasap rezultata bio je prevelik za željenu razinu preciznosti, osobito u ovom slučaju vrlo malih linearno-elastičnih deformacija, zbog čega se rezultati za pomake u daljnjoj analizi ne razmatraju [13].



Slika 2. Uzorci pripremljeni za ispitivanje (lijevo) i pozicije tenzometara na uzorku (desno) – lijevi tenzometri LO (vanjski) i LI (unutarnji) te desni RO (vanjski) i RI (unutarnji).

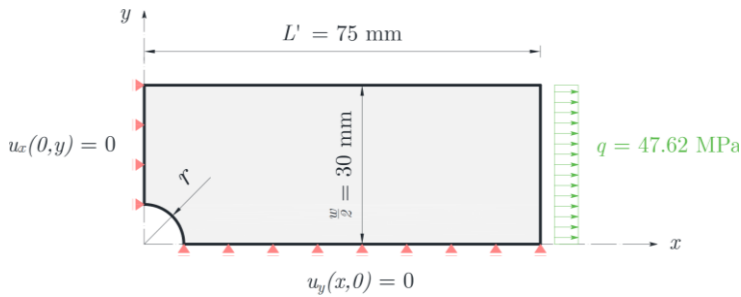
3. Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata

Istovremeno je proveden i virtualni eksperiment gdje je geometrija uzoraka definirana u programu GMSH 3.0.5. i diskretizirana vrlo gustom mrežom ravninskih konačnih elemenata. Budući da uzorci imaju dvije osi simetrije, u analizi je razmatrana samo jedna četvrtina ukupnog modela (Slika 3). Tako generirane mreže konačnih elemenata unesene su u program FEAP, zajedno s odgovarajućim rubnim uvjetima, materijalnim svojstvima i ravnomjerno raspodijeljenim opterećenjem. U numeričkoj analizi problem je modeliran kao ravninsko stanje naprezanja, uz korištenje standardnih Lagrangeovih četveročvorinih konačnih elemenata (linearna interpolacija pomaka - Q4) te dodatni model uz primjenu konačnih elemenata s 9 čvorova (kvadratna interpolacija pomaka - Q9) temeljenih na klasičnoj teoriji elastičnosti. Za validaciju numeričkog modela, vrijednosti faktora koncentracije naprezanja u čvoru na rubu rupe uspoređene su s analitičkim rješenjima prema Howlandu [5] za sva tri tipa uzoraka, pri čemu su pogreške bile manje od 0.1 % pri korištenju oba tipa konačnog elementa.

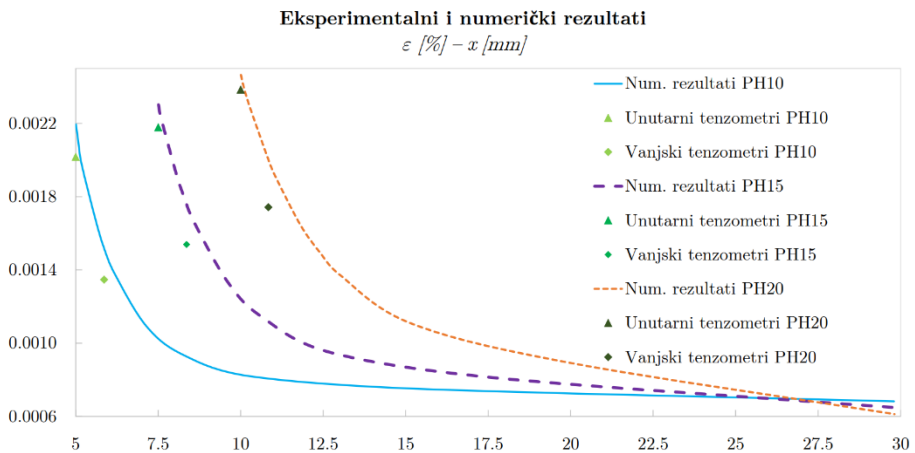
Zbog velikog gradijenta deformacije, vrlo je bitno pažljivo usporediti dobivene rezultate. Stoga se u numeričkom modelu računa srednja vrijednost deformacija iz svih Gaussovih

točaka unutar površine na modelu koja odgovara stvarnoj poziciji i mjernoj površini tenzometara na uzorku.

Rezultati su prikazani na Slici 4, gdje krivulje predstavljaju numeričke vrijednosti duž profila uzoraka od ruba rupe do ruba uzorka. Prosječna tenzometarska mjerenja pokazuju nešto manje vrijednosti deformacija od numerički dobivenih, sa razlikom do 6.7% za deformacije na mjestu unutarnjih tenzometara i razlike do 12.19% za deformacije na mjestu vanjskih tenzometara [12], [13]. Dvostruka veća razlika kod rezultata za vanjske tenzometre, u odnosu na unutarnje, može se pripisati činjenici da je numerički model ravninski (ravninsko stanje naprezanja) te da je raspodjela deformacija pod debljini uzorka parabolična (najveće naprezanje je u sredini uzorka te se ono smanjuje prema površini), što bi 3D model mogao korigirati [13].



Slika 3. Četvrtina modela ploče s kružnom rupom podvrgnuta jednoosnom vlaču.



Slika 4. Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata za sva tri tipa uzoraka, pri čemu apscisa (x) predstavlja udaljenost od središta rupe uzorka duž transverznog profila raspodjele deformacija [13].

4. Diskusija i zaključak

Vidljivo je da postoji razlika u eksperimentalnim i numeričkim rezultatima, unatoč pokušaju provedbe što preciznije metodologije pri njihovoj usporedbi. Rezultati aludiraju na to da ravninski numerički model baziran na klasičnoj teoriji elastičnosti ne može u potpunosti

točno opisati razmatrani problem, unatoč činjenici da je razmatrani uzorak homogen. U budućem radu je potrebno provjeriti može li isti takav, ali 3D model bolje opisati eksperimentalne rezultate. Ukoliko to ne bude slučaj, potrebno je razmotriti primjenu alternativnih teorija.

Zahvale

Prezentirano istraživanje je financirala Hrvatska zaklada za znanost u sklopu rada na projektima (HRZZ-IP-2018-1732, HRZZ-DOK-2018-09-8806 i HRZZ-IP-2024-05-9904) te je dodatno materijalno podržano potporom Sveučilišta u Rijeci uniri-tehnic-18-248 1415.

Literatura

- [1] Pilkey, W.D., Pilkey, D.F.: *Peterson's Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, Ltd, 2020, DOI: 10.1002/9781119532552
- [2] Nowacki, W.K.: *Theory of Asymmetric Elasticity*, Pergamon Press, Warszawa, 1985.
- [3] Gao, X.L.: Analytical solution of a borehole problem using strain gradient plasticity, *J. Eng. Mater. Technol.*, vol. 124, 2002, (365 – 370), DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1480408>
- [4] Toubal, L., Karama, M., Lorrain, B.: Stress concentration in a circular hole in composite plate, *Compos. Struct.*, vol. 68, 2005, (31 – 36), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.02.016>
- [5] Howland, R.C.J.: On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, vol. 229, 1930, (49 – 86), DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1930.0002>
- [6] Žiković, L., Crnković, B.: Analiza Kirschovog problema klasičnom i mikropolarnom teorijom elastičnosti, *Zbornik radova (Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci)*, vol. XXV, br. 1, 2022, (247 - 262), <https://doi.org/10.32762/zr.25.1.16>.
- [7] Aradhye, V.G., Kulkarni, S.S.: Experimental Investigation of Stress Concentration Factor in an Isotropic and Orthotropic Plate with Multiple Circular Holes, *Int. J. Sci. Eng. Technol. Res.*, vol. 4, 2015, (3780 – 3784), DOI: N/A
- [8] Momčilović, N., Motok, M., Maneski, T.: Stress concentration on the contour of a plate opening: Analytical, numerical and experimental approach, *J. Theor. Appl. Mech.*, vol. 51, 2013, (1003 – 1012), DOI: N/A
- [9] Anderson, W.B., Lakes, R.S.: Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam, *J. Mater. Sci.*, vol. 29, 2004, (6413 – 6419), DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00353997>
- [10] Eremeyev, V.A., Skrzat, A., Vinakurava, A.: Application of the Micropolar Theory to the Strength Analysis of Bioceramic Materials for Bone Reconstruction, *Strength Mater.*, vol. 48, 2016, (573 – 582), DOI: <https://doi.org/10.1007/s11223-016-9800-1>
- [11] Griffith, G. E.: Experimental investigation of the effects of plastic flow in a tension panel with a circular hole, *NACA*, 1948.
- [12] Grbac, L.: Finite Elements for Linear Analysis of Micropolar Continuum and the Relationship between the Linked Interpolation and Interpolations on Lie Groups in Linear Form, disertacija, Građevinski fakultet u Rijeci, 2024, urn:nbn:hr:157:519227
- [13] Grbac, L., Jelenić G., Čeh, N.: Axially loaded strip with circular hole - assessment of predictive capacity of micropolar continuum theory, u *preparaciji*, 2025.