

<https://doi.org/10.32762/zt.2025.22>

Stohastički pristup pri modeliranju lijepljenih lameliranih greda od lokalnih listača

A stochastic approach for modelling glued laminated timber beams made from local hardwoods

Jelena Lovrić Vranković¹, Ivana Uzelac Glavinić², Ivica Boko³

(1) Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Hrvatska, jlovric@gradst.hr;
uzelac@gradst.hr; iboko@gradst.hr

Sažetak

U ovom radu prikazan je stohastički model za predviđanje čvrstoće na savijanje lijepljenih lameliranih greda od graba (*Carpinus betulus* L.) iz hrvatskih šuma. Model se temelji na 2D numeričkoj simulaciji koja kombinira softverske alate ANSYS i Matlab, s ciljem generiranja varijabilnih mehaničkih svojstava duž pojedinačnih lamela i cijelog nosača. Pri generiranju globalnih mehaničkih svojstava lamela korištene su vrijednosti dobivene vlačnim ispitivanjem lamela. Za modeliranje lokalne varijabilnosti duž lamele primijenjen je autoregresijski model prvog reda, pri čemu je uzeta u obzir kros-korelacija između modula elastičnosti i vlačne čvrstoće. Ovaj model simulira ispitivanje na savijanje lijepljenih lameliranih nosača prema normi EN 408 i pokazuje određivanje 5% fraktila čvrstoće na savijanje, a koja predstavlja karakterističnu vrijednost.

Ključne riječi: stohastički pristup, grab, metoda konačnih elemenata, čvrstoća na savijanje, lijepljene lamelirane grede

Abstract

This paper presents a stochastic model for predicting the bending strength of glued laminated beams made of European hornbeam (*Carpinus betulus* L.) sourced from Croatian forests. The model is based on a 2D numerical simulation that combines the ANSYS and Matlab software platforms, intending to generate spatially variable mechanical properties along individual lamellae and the entire beam. For the generation of global mechanical properties of the lamellae, values obtained from tensile tests were used. To model the local variability along each lamella, a first-order autoregressive model was applied, taking into account the cross-correlation between the modulus of elasticity and tensile strength. The model simulates a bending test of glued laminated timber beams in accordance with EN 408 and enables the determination of the 5th percentile of bending strength, which represents the characteristic strength according to structural design standards.

Keywords: stochastic approach, European hornbeam, finite element method, bending strength, glued laminated beams

1. Uvod

Drvo je obnovljiv materijal i jedan je od najvažnijih prirodnih materijala. Lijepljeni lamelirani nosači (LLN), kao proizvodi na bazi drva, imaju veći potencijal u pogledu čvrstoće i krutosti u odnosu na nosače od punog drva, zahvaljujući efektu homogenosti. Jedno od bitnih svojstava LLN-a je *lamination effect* na temelju kojeg se može zaključiti kako je čvrstoća na savijanje LLN-a veća od čvrstoće na savijanje pojedinačne lamele s obzirom da su slabije mehaničke karakteristike lamele u nosaču kompenzirane boljim mehaničkim svojstvima susjedne lamele. Provedeno je mnogo istraživanja na temu veze između vlačne čvrstoće lamela i zupčastih spojeva u odnosu na mehanički potencijal LLN-a. Dio istraživanja bio je usmjeren na eksperimentalna ispitivanja lamela i lijepljenih lameliranih nosača, dok je drugi dio istraživanja usmjeren na modeliranje LLN-a koristeći stohastiku s ciljem određivanja veze između 5% fraktila vlačne čvrstoće lamele i 5% fraktila čvrstoće na savijanje LLN-a.

Korištenje stohastike u metodi konačnih elemenata datira još od 1980-ih [1]. 1985. godine razvijen je *Karlsruher Rechenmodel* temeljen na opsežnom istraživanju varijabilnosti mehaničkih karakteristika lamela i zupčastih spojeva smreke (*Picea abies* L.) [2]. Razmak između zupčastih spojeva generiran je slučajnim odabirom iz statističke distribucije [3], a elementima koji spajaju dvije lamele zadana je vlačna čvrstoća zupčastih spojeva kao funkcija niže vrijednosti gustoće dviju spojenih lamela. Nekoliko godina kasnije provedeni su dodatni testovi savijanja LLN-a različitih visina na temelju kojih su razvijene nove jednadžbe korelacije između mehaničkih karakteristika [4] te je implementirana poboljšana distribucija kvrgi i njihovog položaja. Nakon dugog procesa kalibriranja, definirane su jednadžbe (1) i (2) koje povezuju čvrstoću na savijanje LLN-a sa čvrstoćom zupčastih spojeva i lamela, a koja je implementirana u europski standard EN 14080 [5]:

$$f_{m,g,k} = -2.2 + 2.5f_{t,0,k}^{0.75} + 1.5 \cdot \left(\frac{f_{m,j,k}}{1.4} - f_{t,0,k} + 6 \right)^{0.65} \quad (1)$$

$$1.4 \cdot f_{t,0,k} \leq f_{m,j,k} \leq 1.4 \cdot f_{t,0,k} + 12 \quad (2)$$

gdje $f_{m,g,k}$ predstavlja karakterističnu čvrstoću na savijanje LLN-a, $f_{m,j,k}$ je karakteristična čvrstoća na savijanje zupčastog spoja, dok je $f_{t,0,k}$ karakteristična vlačna čvrstoća lamele. 1989. Govindarajoo je implementirao metodu efektivnog poprečnog presjeka za proračun nosivosti grede [6]. 1992. godine Hernandez i dr. razvili su PROLAM model, a koji se za razliku od dotadašnjih modela zasniva na pristupu s efektivnom krutosti [7]. Ovakav proračun bio je efikasniji u usporedbi s metodom konačnih elemenata, ali jedan od nedostataka je zasebna analiza svakog segmenta bez utjecaja karakteristika susjednih segmenata. U posljednje vrijeme globalni porast temperatura i ekstremni vremenski fenomeni te klimatske promjene općenito utječu na širenje šuma listača (hrast, bukva, grab), a koje pokazuju bolje mehaničke karakteristike u odnosu na šume četinjača (bor, smreka). Sukladno navedenim promjenama, opsežna istraživanja proizvoda na bazi tvrdih drva kao nosivih elemenata odvijaju se u posljednjih 20 godina, a europska drvna industrija prepoznala je potencijal tvrdih drva i uvrštava sve više proizvoda na bazi tvrdog drva u svoje propise. U ovom kontekstu 2017.g. pokrenut je projekt "European hardwoods for the building sector" (EU Hardwoods) od strane Holzforschung Austria, Sveučilišta u Ljubljani,

MPA Stuttgart i FCBA Simonin Sas [8]. Također, uočene su određene promjene u numeričkom modeliranju proizvoda na bazi tvrdih drva. Blass [9] je razvio prvu verziju "Karlsruher Rechenmodel" primjenjivu na buku i kombinirani LLN od mekog i tvrdog drva [10]. Promjene u odnosu na prethodne modele su napravljene u vidu uvođenja novih regresijskih jednažbi materijalnih karakteristika. 2014. god. Fink je razvio model koristeći Matlab i probabilistički pristup, a koji se u mnogo aspekata razlikuje od prethodnih modela [11]. Indikatori mehaničkih karakteristika, poput dimenzija kvrgi i dinamičkog modula elastičnosti, određeni su strojnom klasifikacijom. Numerički rezultati validirani su na LLN-ima s poznatim lokalnim varijabilnostima i njihovom precizno definiranom pozicijom što dosad nije bio slučaj. Varijabilnost duž grede ogledala se u prisutnosti kvrgi dok je materijal između kvrgi imao nepromjenjiva svojstva ("clear wood"). Ovaj model je proširen istraživanjem [12] uključujući mehaniku loma koristeći energiju loma i koncept razmazanih pukotina. 2017. god. Kandler i Fussl predstavili su model koji generira MOE preko Karhunen-Loeve teorema i uz pomoć laserskih skenera definira nagib vlakana, ali ne uzima u obzir zupčaste spojeve prilikom modeliranja [13]. Tapia je razvio model s konačnim elementima za predviđanje čvrstoće na savijanje ("Stuttgart Stochastic Strength Glulam Model S3GLUM") [14]. Također, koristio je XFEM metodu kako bi simulirao početak i propagaciju jedne diskretne pukotine u svakom segmentu grede. Vida [15] je istraživao grede različite klase i veličine koristeći efektivnu krutost. U odnosu na prethodne modele, prvi put je korišten 3D model u koji su implementirana dva tipa diskretnih pukotina preko kohezivnih površina i to vertikalna pukotina unutar lamele i horizontalna pukotina između lamela (*traction-separation law*), a koje omogućavaju formiranje kontinuirane pukotine. U 2021. godini Europska organizacija za tehnička dopuštenja (EOTA) izdala je dokument EAD 130320-00-0304 *Glued laminated timber made of solid hardwood* [16], a koji pokriva lijepljeno lamelirano drvo od određenih vrsta tvrdog drva. EAD sadrži osnovne principe za modeliranje LLN-a od tvrdog drva izloženog savijanju, a koji uključuju 2D model s konačnim elementima pri čemu se globalne karakteristike pridružuju svakoj lameli iskazane preko eksperimentalno dobivenih statističkih distribucija. Svaka lamela dijeli se na segmente širine cca 100 mm s različitim čvrstoćama i krutosti na način da se karakteristike pojedinog segmenta lamele (vlačna i tlačna čvrstoća, MOE paralelno s vlakancima) generiraju kroskorelacijskom i autokorelacijskom analizom. Također, svaka lamela sadrži posebne zone za modeliranje zupčastih spojeva čije se karakteristike generiraju na osnovu postojećih distribucija dobivenih eksperimentalno. Pretpostavlja se ortotropno ponašanje materijala uzimajući u obzir nelinearnost i prikladni model otkazivanja. Osnovni principi uključuju provođenje Monte-Carlo simulacija na način da se za svaki set stohastički zadanih parametara računa čvrstoća na savijanje, a ponavljanjem proračuna s različitim vrijednostima parametara dobije se distribucija čvrstoće na savijanje LLN-a. Sukladno točki 2.2.1.3 EAD [16], čvrstoća na savijanje lijepljenog lameliranog drva $f_{m,g,flat,k}$ određuje se preko vlačne čvrstoće lamela $f_{t,0,l,k}$ i zupčastih spojeva $f_{t,0,j,k}$ prema izrazu (3):

$$f_{m,g,flat,k} = a_1 + a_2 f_{t,0,l,k}^{e_1} + a_3 (f_{t,0,j,k} - f_{t,0,l,k} + a_4)^{e_2} \quad (3)$$

Parametri a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , e_1 i e_2 iz prethodne jednadžbe određuju se iz modela temeljenog na metodi konačnih elemenata i Monte Carlo simulacijama stohastičkih karakteristika lamela. U

ovom radu biti će predstavljen numerički model s primjenom Monte Carlo simulacija za određivanje karakteristične čvrstoće na savijanje LLN-a.

2. Numerički model

2.1. Generiranje globalnih mehaničkih karakteristika

Prvi korak predstavlja generiranje globalnih karakteristika lamela i to vlačne čvrstoće paralelno s vlakancima $f_{t,0}$, tlačne čvrstoće paralelno s vlakancima $f_{c,0}$ i modula elastičnosti paralelno s vlakancima E_0 . Distribucije za vlačnu čvrstoću i modul elastičnosti paralelno s vlakancima preuzete su iz rezultata vlačnih testova na lamelama graba (*Carpinus betulus* L.) [17], dok su podaci za tlačnu čvrstoću paralelno s vlakancima $f_{c,0,k}$ preuzeti iz literature [18] i definirani izrazom (4):

$$f_{c,0,k} = 11,54 + 4,41f_{t,0,k}^{0,5} \quad (4)$$

Duljine lamela generirane su koristeći lognormalnu distribuciju. Prethodno navedeno uključuje generiranje uzoraka iz standardne normalne distribucije, potom primjenu Cholesky dekompozicije kako bi se dobile korelirane varijable i konačno transformacija svake varijable u stvarnu distribuciju - lognormalnu.

2.2. Generiranje lokalnih mehaničkih karakteristika segmenata lamela

Lamele su podijeljene na segmente duljine 100 mm. Krutosti segmenata svake pojedine lamele generirane su korištenjem autoregresivnog modela, a nakon čega su dobivene vrijednosti korigirane zbog prilagodbe lokalnih krutosti segmenata vrijednostima globalnih krutosti lamela (prema [19]). Za generiranje čvrstoća duž lamela korišten je vektorski autoregresijski model uz primjenu kros-korelacije.

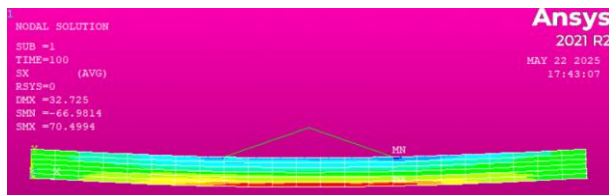
2.3. Metoda konačnih elemenata

Za implementaciju modela korišten je Ansys 2021 R2 [20]. Jednostavno oslonjena lijepljena lamelirana greda sadrži lamele od kojih je svaka podijeljena na segmente duljine 100 mm. Korišteni su 2D elementi (PLANE 183). Rubni uvjeti odgovaraju uvjetima definiranim u normi EN 408 [21] za ispitivanje na savijanje u 4 točke, a opterećenje se definira u režimu kontroliranog prirasta pomaka. Stohastička raspodjela mehaničkih svojstava uzrokuje neuravnoteženo opterećenje između dviju točki, a što je riješeno uvođenjem referentne kontrolne točke i vezanih pomaka između čvorova prema [19]. Proračun se provodi iterativno pri čemu se u svakom koraku pomak povećava, a prekida se kada maksimalna sila padne više od 2%.

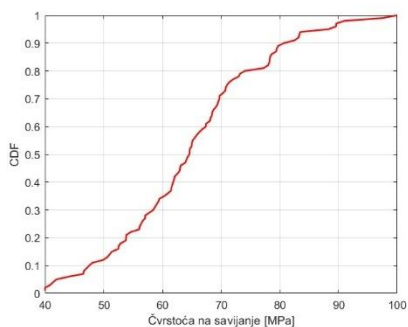
3. Rezultati

Ukupna sila primijenjena na gredu i njezina geometrija koriste se za izračun čvrstoće na savijanje. Slika 1. prikazuje naprezanja u odabranoj lijepljenoj lameliranoj gredi. Monte-Carlo simulacije provode se na način da se za svaki set stohastički zadanih parametara računa čvrstoća na savijanje, a ponavljanjem proračuna s različitim vrijednostima parametara dobije se distribucija čvrstoće na savijanje LLN-a. Nakon provođenja svih analiza izračunata je

kumulativna funkcija distribucije čvrstoće na savijanje (Slika 2.), a na osnovu koje je definiran 5% fraktil čvrstoće na savijanje.



Slika 1. Rezultati naprezanja pri savijanju u 4 točke za odabranu gredu



Slika 2. Kumulativna funkcija distribucije čvrstoće na savijanje za odabranu gredu

4. Zaključak

S obzirom da eksperimentalna ispitivanja zahtijevaju visoke financijske troškove, posljednja istraživanja ukazuju na potencijal razvoja proračunskih modela i mogućnost procjene mehaničkih karakteristika LLN-a korištenjem istih. Tijekom posljednjeg desetljeća, nekoliko numeričkih modela je predloženo za opisivanje ponašanja lijepljenih lameliranih nosača od mekog i tvrdog drva. Numerički 2D model opisan u ovom radu kombinira softvere ANSYS i Matlab u svrhu generiranja varijabilnih mehaničkih svojstava duž geometrije grede. Ovaj model numerički simulira ispitivanje na savijanje lijepljenih lameliranih nosača prema normi EN 408 i konačno pokazuje određivanje 5% fraktila čvrstoće na savijanje, a koja predstavlja karakterističnu vrijednost. Potrebno je provesti dodatna eksperimentalna istraživanja koja će uključiti mjerenje nepravilnosti u drvu kako bi se iste mogle implementirati u numerički model i time postići preciznost prilikom određivanja karakteristične vrijednosti čvrstoće na savijanje.

Zahvala

Autori zahvaljuju Tehničkom sveučilištu u Grazu na podršci i stručnom vodstvu tijekom provođenja vlačnih testova. Ovo istraživanje je djelomično podržano kroz projekte IRI-2 KK.01.2.1.02.0330 i KK.01.1.1.02.0027.

Literatura

- [1] Foschi R. O., Barrett J. D.: Glued-laminated beam strength: A model., ASCE J. Struct. Div. 106, pp. 1735–1754, 1980, <https://doi.org/10.1061/JSDSDEAG.00054>

- [2] Ehlbeck J., Colling F., Görlacher R.: Einfluß keilgezinkter Lamellen auf die Biegefestigkeit von Brettschichtholzträgern, Holz als Roh- und Werkstoff 43.8, pp. 333–337, 1985, doi: 10.1007/ "02607817
- [3] Larsen, H. J.: Strength of glued laminated beams, Part 5. Report No. 8004, Institute of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, 1980
- [4] Ehlbeck, J., F. Colling: Biegefestigkeit von Brettschichtholz in Abhängigkeit von Rohdichte, Elastizitätsmodul, Ästigkeit und Keilzinkung der Lamellen, der Lage der Keilzinkung sowie von der Trägerhöhe. Tech. Rep. Karlsruhe, Germany: Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Universität Fridericiana Karlsruhe, 1987
- [5] EN 14080 Timber structures - Glued laminated timber and glued solid timber – Requirements; European Committee for Standardization: Brussels, Belgium, 2013.
- [6] Govindarajoo, R.: Simulation modeling and analyses of straight horizontally laminated glulam timber beams, Ph.D. dissertation, Civil Engineering Dept., Purdue University, West Lafayette, IN., 1989
- [7] Hernandez, R., Bender D. A., Richburg B. A., Kline K. S.: Probabilistic Modeling of Glued-Laminated Timber Beams, Wood and Fiber Sciences 24 (3), pp. 294–306, 1992
- [8] Linsenmann, P.: EU Hardwoods, European Hardwoods for the Building Sector, Reality of today – possibilities for tomorrow, Holzforschung Austria, 2016
- [9] Blaß, H. J., Frese M., Glos P., Linsenmann P., Denzler J.: Biegefestigkeit von Brettschichtholz aus Buche, German. Tech. rep. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 141, 2005, doi: 10.5445/8ZS/1000001371
- [10] Blaß, H. J., Frese M.: Biegefestigkeit von Brettschichtholz-Hybridträgern mit Randlamellen aus Buchenholz und Kernlamellen aus Nadelholz. German. Tech. rep. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 55, 2006, doi: 10.5445/ 8ZS/1000005148
- [11] Fink, G.: Influence of varying material properties on the load-bearing capacity of glued laminated timber, PhD thesis, ETH Zürich, 2014, doi: 10.3929/etha-a-010108864
- [12] Blank, L., Fink, G., Jockwer R., Frangi A.: Quasi-brittle fracture and size effect of glued laminated timber beams, European Journal of Wood and Wood Products, pp. 667–681, 2017, doi: 10.1007/s00107- 017-1156-0
- [13] Kandler, G., Fussl, J., Eberhardsteiner, J.: Stochastic finite element approaches for wood-based products: theoretical framework and review of methods, Wood Science and Technology, 49, p.p. 1055–1097, 2015
- [14] Tapia Camu C.: Variation of mechanical properties in oak boards and its effect on glued laminated timber, PhD thesis, Cuvillier Verlag Gottingen, Universitat Stuttgart, 2022
- [15] Vida, C., Lukacevic, M., Eberhardsteiner, J., Fussl, J.: Modelling approach to estimate the bending strength and failure mechanisms of glued laminated timber beams, Engineering Structures, 255, 2022
- [16] EAD 130320-00-0304 Glued Laminated Timber made of solid hardwood, European Organisation for Technical Assessment (EOTA), June 2018.
- [17] Lovrić Vranković, J., Uzelac Glavinić, I., Boko, I., Torić N.: An experimental investigation on the tensile properties parallel to the grain of European hornbeam (*Carpinus betulus* L.) boards, Eur. J. Wood Prod. 83, 130, 2025, <https://doi.org/10.1007/s00107-025-02286-0>
- [18] Kovryga A., Stapel P., van de Kuilen J. W. G: Mechanical properties and their interrelationships for medium-density European hardwoods, focusing on ash and

beech, Wood Material Science & Engineering, 15(5), 289-302, 2019, DOI: 10.1080/17480272.2019.1596158

- [19] Tapia Camu C., Aicher S.: A Stochastic Finite Element Model for Glulam Beams of Hardwoods, Proceedings of the World Conference for Timber Engineering (WCTE), Seoul, Republic of Korea, 20–23 August 2018
- [20] ANSYS, Inc., Release 2021 R2, Canonsburg, PA, USA, 2021
- [21] EN 408 Timber structures -- Structural timber and glued laminated timber -- Determination of some physical and mechanical properties; European Committee for Standardization: Brussels, Belgium, 2012