

<https://doi.org/10.32762/zt.2025.20>

Slobodno ljuľanje krutog bloka na elastičnoj gredi

Free rocking of a rigid block on the elastic beam

Katarina Tutić¹, Teo Mudrić¹, Nina Čeh¹, Martin Arnold²

(1) *Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, Hrvatska*

(2) *Institute of Mathematics, Martin Luther University Halle-Wittenberg, Theodor-Lieser-Street 5, 06120 Halle (Saale), Germany*

Sažetak

Rad predstavlja numerički model slobodnog ljuľanja krutog aluminijskog bloka na Euler-Bernoullijevoj elastičnoj gredi, razvijen u Pythonu. Model kombinira metodu konačnih elemenata za gredu i pristup ne-glatke kontaktne dinamike (NSCD) za opis normalnog i tangencijalnog kontakta, uz zadovoljenje Signorini-Coulombovih uvjeta. Vremenska integracija provodi se Jean–Moreau θ shemom, što omogućuje stabilno rješavanje diskontinuiteta brzina. Za provjeru točnosti izveden je eksperiment u kojemu se rotacijski pomaci bloka prate sustavom ZEISS Aramis pri 165 slika/s. Eksperimentalnom validacijom uspoređene su numeričke i eksperimentalne veličine kuta zaokreta i kutne brzine, čime je potvrđena vjerodostojnost prikazanog numeričkog postupka.

Ključne riječi: ne-glatka kontaktna dinamika (NSCD), metoda konačnih elemenata (FEM), Jean–Moreau θ metoda

Abstract

The study presents a numerical model of the free rocking of a rigid aluminium block on an Euler–Bernoulli elastic beam, implemented in Python. The model combines a finite-element formulation for the beam with a non-smooth contact dynamics (NSCD) approach to capture normal and tangential contact while strictly enforcing the Signorini–Coulomb conditions. Time integration is performed with the Jean–Moreau θ scheme, enabling stable treatment of velocity discontinuities. To verify accuracy, an experiment was conducted in which the block's rotational displacements were tracked with a ZEISS Aramis system at 165 fps. Experimental validation compared simulated and measured rotation angles and angular velocities, thereby confirming the reliability of the proposed numerical procedure.

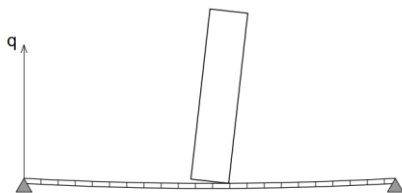
Keywords: non-smooth contact dynamics (NSCD), finite element method (FEM), Jean–Moreau θ method

1. Uvod

Problem ljuljanja krutog bloka na elastičnoj gredi karakterizira ne-glatko dinamičko ponašanje zbog učestalih promjena kontaktnog stanja između bloka i grede. Takva pojava ima široke inženjerske primjene, od stabilnosti suhozidnih konstrukcija bez veziva do dizajna pasivnih sustava disipacije seizmičke energije. Klasične glatke metode vremenske integracije ne mogu pouzdano simulirati nagle diskontinuitete brzina i impulsa, pa se u literaturi kao robusno rješenje nameću (NSCD) time-stepping metode [1] s konstantnim korakom. Cilj ovoga rada jest proširiti metodološki okvir predstavljen u Mudrić et al. [2] kroz eksperimentalnu validaciju ljuljanja krutog bloka na elastičnoj gredi. U tu svrhu primjenjujemo Jean-Moreau metodu [3] i uspoređujemo numeričke rezultate s eksperimentalno izmjerenim kutevima zaokreta bloka, kako bismo ocijenili konvergenciju NSCD pristupa u problemu modeliranja kontakta krutog i deformabilnog tijela.

2. Opis modela

Na Slici 1. prikazan je dvodimenzionalni model slobodnog ljuljanja krutog bloka na elastičnoj slobodno oslonjenoj gredi. Kruti blok je u početnom položaju naslonjen na gredu u jednoj točki, odakle je pušten da se slobodno kreće pod djelovanjem gravitacije. Kontaktna interakcija između bloka i grede ograničena je isključivo na rubne točke bloka, a greda je modelirana kao kontinuirana Euler–Bernoullijeva elastična greda.



Slika 1. Model krutog bloka na elastičnoj gredi

2.1. Modeliranje grede

Deformacija grede opisana je Euler–Bernoullijevom parcijalnom diferencijalnom jednačom [4]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

gdje je EI krutost, c koeficijent prigušenja, ρA masa po jedinici duljine, a $f(x,t)$ vanjsko opterećenje. Za numeričko rješavanje (1) greda se diskretizira na niz konačnih elemenata [5]. U svakom elementu pomak $w(x,t)$ aproksimira se kubnim polinomom, što omogućuje određivanje pomaka i zaokreta u svim točkama elemenata. Na temelju odabranih funkcijskih oblika izvode se lokalne matrice krutosti, koje se zatim sastavljaju u globalne matrice uz primjenu odgovarajućih rubnih uvjeta. Time se dobiva sustav običnih diferencijalnih jednačbi drugog reda:

$$M_{be} \ddot{q}_{be}(t) + C_{be} \dot{q}_{be}(t) + K_{be} q_{be}(t) = P_{be}(t) + r_{be}(t) \quad (2)$$

gdje je q_{be} vektor pomaka čvorova, P_{be} vektor vanjskih sila, a r_{be} vektor kontaktnih sila.

2.2. Modeliranje bloka

Blok se modelira kao potpuno kruto tijelo, pri čemu su moguća mjesta kontakta definirana na četiri rubne točke. Svaka od tih točaka ima tri stupnja slobode. Jednadžba gibanja drugog reda stoga glasi:

$$M_{bl}\ddot{q}_{bl}(t) = F_{bl}(t) + r_{bl}(t) \quad (3)$$

gdje je:

$$M_{bl} = \begin{bmatrix} m_{bl} & 0 & 0 \\ 0 & m_{bl} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bl} \end{bmatrix}, \quad \ddot{q}_{bl}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{X}_{bl}(t) \\ \ddot{Y}_{bl}(t) \\ \ddot{\phi}_{bl}(t) \end{bmatrix}, \quad F_{bl}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ M_{bl}(t) \end{bmatrix}, \quad r_{bl}(t) = \begin{bmatrix} r_{x,bl}(t) \\ r_{y,bl}(t) \\ M_r(t) \end{bmatrix}$$

gdje su m_{bl} masa bloka, I_{bl} njegov moment tromosti, $F_{bl}(t)$ vektor vanjskih sila i momenata, a $r_{bl}(t)$ vektor kontaktnih sila i momenata.

2.3. Kontaktni uvjeti

Za potpun, fizikalno konzistentan opis gibanja bloka na elastičnoj gredi potrebno je u jednadžbe gibanja uvesti komplementarne uvjete koji sprječavaju penetraciju i pravilno modeliraju trenje u kontaktu. Signorinijeva relacija (4) osigurava da vrh bloka nikada ne prodire kroz površinu grede. Dok god postoji razmak između bloka i grede, normalna kontaktna sila ostaje jednaka nuli, a tek kada se razmak potpuno zatvori razvija se pozitivna reakcija koja sprječava daljnju penetraciju. Coulombov zakon trenja (5) ograničava tangencijalnu silu na vrijednost jednaku umnošku normalne sile i koeficijenta trenja te blok ostaje nepomičan dok ta granica nije dosegnuta. Nakon što se prag prijeđe započinje relativno klizanje pri čemu trenje uvijek djeluje suprotno smjeru pomaka.

$$U_n^+(t) \geq 0, \quad R_n(t) \geq 0, \quad U_n^+(t)R_n(t) = 0 \quad (4)$$

$$\|R_t\| \leq \mu R_n, \text{ a ako je } U_t^+ \neq 0, \quad R_t \leq -\mu R_n \frac{U_t^+}{\|U_t^+\|} \quad (5)$$

3. Jean–Moreau θ time stepping metoda

Jean–Moreau θ metoda [3] predstavlja neglatku time–stepping metodu osmišljenu za stabilnu integraciju dinamičkih sustava u kojima Signorini–Coulombovi kontaktni uvjeti uvode diskontinuitete brzina i sila. U svakom koraku, metoda simultano rješava diskretizirane jednadžbe gibanja i pripadajući linearno komplementarni problem kontakta, čime se zadovoljavaju zahtjevi nepenetracije i trenja. Parametar θ određuje stupanj implicitnosti: kod $\theta = 0$ dobivamo eksplicitnu shemu, kod $\theta = 1$ potpuno implicitnu shemu. Tijekom vremenskog intervala $h = t^{i+1} - t^i$ jednadžbu gibanja integrira se tako da u idućem vremenskom koraku dobijemo:

$$\dot{q}^{i+1} = \dot{q}^i + hWF^{i+1} + hWr^{i+1} \quad (6)$$

$$q^{i+1} = q^i + h(\theta \dot{q}^{i+1} + (1 - \theta)\dot{q}^i) \quad (7)$$

Globalni pomaci, brzine, te vanjske i unutarnje sile grupirane su u vektorima:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{bl} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_{be} \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_{be} \end{bmatrix}, \quad F^{i+1} = \begin{bmatrix} \Delta t \theta F_{bl}^{i+1} + \Delta t (1 - \theta) F_{bl}^i \\ -K_{be}(h\theta \dot{q}_{be}^i + q_{be}^i) - C_{be}\dot{q}_{be}^i + \theta P_{be}^{i+1} + (1 - \theta)P_{be}^i \end{bmatrix}$$

pri čemu prvi blok komponenata odgovara gibanju krutog bloka, a drugi elastičnoj gredi. Matrica W iz jednadžbe (6) definirana je kao:

$$W = \begin{bmatrix} M_{bl}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{be} \end{bmatrix}, \quad W_{be} = (M_{be} + h\theta C_{be} + h^2\theta^2 K_{be})^{-1}$$

gdje M_{bl}^{-1} predstavlja inverznu masu krutog bloka, dok matrica W_{be} , formirana kombiniranjem parametara mase, krutosti i prigušenja grede, čini njenu efektivnu inverznu matricu i osigurava uravnoteženo modeliranje elastičnog i viskoznog odziva sustava u svakom koraku integracije. Naposljetku, brzina u idućem vremenskom koraku (7) zapisuje se kao zbroj komponente neovisne o kontaktu i komponente ovisne o kontaktnoj interakciji:

$$\dot{q}^{i+1} = \dot{q}^{free} + hW\tau^{i+1} \quad (8)$$

3.1. Modeliranje kontakta

Prilikom time-stepping integracije detekciju kontakta provodimo u svakom koraku kroz evaluaciju funkcije razmaka, koja mjeri udaljenost između parova kontaktnih točaka. Kontakt se smatra uspostavljenim kada funkcija razmaka dosegne vrijednost nula. Zatim globalne brzine $\dot{q}$ i kontaktne sile r transformiramo u lokalni referentni sustav pomoću ortonormirane matrice Q :

$$U = Q\dot{q}^{i+1}, \quad R_{i+1} = Qr_{i+1} \quad (9)$$

gdje su $U = [U_n, U_t]^T$ i $R = [R_n, R_t]^T$ normalne i tangentne komponente relativne brzine, odnosno impulsne sile kontaktnog para. U lokalnom koordinatnom sustavu diskretizirana jednadžba gibanja (8) poprima oblik:

$$U_{i+1} = U_{free} + HhR_{i+1}, \quad H = QWQ^T \quad (10)$$

pri čemu je U_{free} relativna brzina koja bi se ostvarila bez reakcija, dok operator H povezuje impulse i brzine uzimajući u obzir inverznu masu bloka i efektivnu matricu grede W_{be} . Kontaktne impulse određujemo rješenjem Signorini–Coulombova uvjeta:

$$U_{n,i+1} \geq 0, \quad R_{n,i+1} \geq 0, \quad U_{n,i+1}R_{n,i+1} = 0 \quad (11)$$

$$\|R_t\| \leq \mu R_n, \quad \text{a ako je } U_{t,i+1} \neq 0, \quad R_t \leq \mu R_n \frac{U_{t,i+1}}{\|U_{t,i+1}\|} \quad (12)$$

Kada je aktivan samo jedan par točaka, sustav (10) zajedno s uvjetima (11)–(12) daje izraz za R_{i+1} . Kada je istodobno aktivno više od jednog kontaktnog para, za svaki se par c konstruira vlastita ortonormirana matrica Q^c . Relacija između relativne brzine i impulsa u tom paru tada više ne ovisi samo o njegovu vlastitom impulsu, nego i o impulsima svih ostalih parova:

$$U_{i+1}^c = U_{free} + \sum_{d \neq c} H^{cd} h R_{i+1}^d + H^{cc} h R_{i+1}^c \quad (13)$$

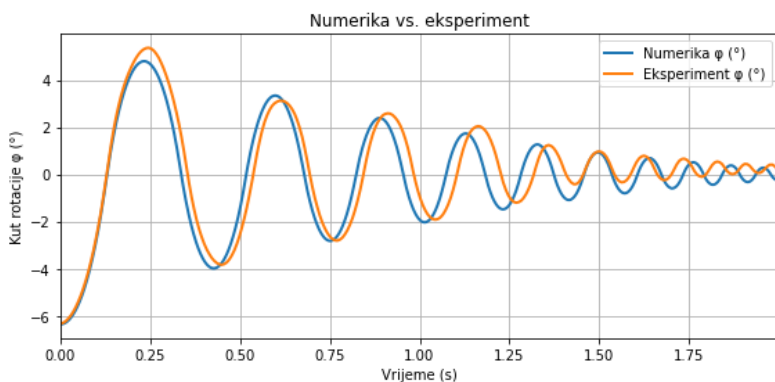
Budući da je impuls R_{i+1}^c svakoga para izravno ovisan o nepoznatim impulsima ostalih parova, sustav se rješava iteracijskim postupkom koji započinje nul-vektorom impulsa. U svakoj iteraciji ažurira se impuls jednoga kontaktnog para pri čemu se u (13) uvrštavaju procjene preostalih impulsa, a novi se impuls određuje iz Signorini-Coulombovih komplementarnih uvjeta. Iteracije se nastavljaju sve dok se razlika impulsa dvaju uzastopnih koraka ne spusti ispod propisane tolerancije ili dok se ne dosegne najveći dopušteni broj koraka. Po konvergenciji impulsi se transformiraju natrag u globalni sustav koordinata i uključuju u jednadžbe gibanja bloka i pridruženih čvorova grede.

4. Eksperimentalna ispitivanja

U ovom eksperimentu slobodnog ljuljanja aluminijski se blok najprije postavi na aluminijsku gredu pri definiranom kutu rotacije i privremeno fiksira tankom, zapaljivom niti. Nakon izgaranja niti, blok se oslobađa bez dodavanja ikakvog vanjskog impulsa, čime se uspostavlja gotovo idealno slobodno gibanje. Tijekom cijelog eksperimenta njegovo se kretanje bilježi ZEISS Aramis 4M kamerama velike brzine pri 165 slika/s. Dobiveni podatci učitavaju se u ZEISS Aramis softver, gdje se primjenom metode referentnih točaka automatski detektiraju i prate optički markeri nanесeni na blok. Ovaj pristup omogućuje vrlo precizno određivanje trodimenzionalnih translacijskih i rotacijskih pomaka, čiji se rezultati koriste za validaciju numeričkih modela. Serija eksperimentalnih ispitivanja provedena je za više početnih kutova i različite geometrijske konfiguracije grede, a u ovom su radu prikazani rezultati samo jednoga reprezentativnog pokusa. Postav sa Slike 1. obuhvaća elastičnu aluminijsku gredu krutosti 69 GPa te širine 3 cm, debljine 0,15 cm i raspona između oslonaca 36 cm, te kruti aluminijski blok dimenzija 13,5×3×3 cm.

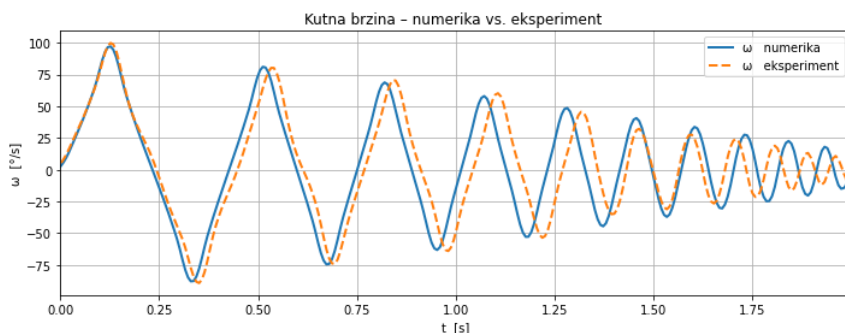
5. Validacija numeričkog modela

Usporedba numerički simulirane i eksperimentalno izmjerene rotacije bloka pokazuje vrlo visok stupanj podudarnosti (Slika 2). Tijekom početnih oscilacija, numerička krivulja kuta zaokreta gotovo se u potpunosti poklapa s eksperimentalnom, što znači da model vjerno reproducira inicijalnu dinamiku sustava. U kasnijim fazama gibanja vidljiva su manja odstupanja – simulacija blago podcjenjuje amplitude osciliranja te nešto ranije predviđa trenutke uspostave kontakta u odnosu na eksperiment.



Slika 2. Usporedba numeričkog i eksperimentalnog kuta zaokreta bloka

Kutna brzina bloka dobivena modelom jednako tako dobro prati izmjerenu brzinu iz eksperimenta (Slika 3.). Na početku gibanja krivulje se gotovo preklapaju, dok se nakon nekoliko poluoscilacija počinje opažati blago razilaženje. Daljnja analiza grafova otkriva da se s vremenom postupno povećavaju razlike u amplitudama kutne brzine, a istovremeno se pojavljuje fazni pomak budući da se maksimalne vrijednosti brzine u numeričkom modelu javljaju nešto ranije nego u eksperimentu.



Slika 3. Usporedba numeričke i eksperimentalne brzine kuta zaokreta bloka

6. Zaključak

U ovom je radu razvijen i eksperimentalno validiran dvodimenzionalni NSCD model slobodnog ljuljanja krutog bloka na Euler–Bernoullijevoj elastičnoj gredi. Dobiveni rezultati pokazuju da odabrana shema vremenske integracije pouzdano zahvaća glavne dinamičke značajke sustava. Time se model potvrđuje kao dobra osnova za daljnju parametarsku analizu i preciznija numerička istraživanja. U kasnijim fazama gibanja ipak su uočena ograničenja koja proizlaze iz pojednostavljenog opisa kontakta, pa se bilježe primjetna odstupanja u amplitudi. Buduća istraživanja bit će usmjerena na uvođenje realističnijeg kontaktnog zakona s koeficijentom restitucije većim od nule, kako bi se poopćio kontaktni model te što vjernije opisalo trajanje kontakta i mehanizam disipacije energije.

Zahvale

- Projekt razvoja karijere mladih istraživača – osposobljavanje novih doktora znanosti, financiran od Hrvatske zaklade za znanost (HRZZ)
- Projekt MZO-DAAD 2024/2025 pod naslovom „Metode vremenske integracije s fiksnim vremenskim korakom za ne-glatke dinamičke sustave s kontaktom i trenjem”, financiran od Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
- Projekt Sveučilišta u Rijeci: „Dinamička karakterizacija krutih blokova s kohezijskim kontaktima” (referentni broj: uniri-iskusni-tehnic-23-2803274)
- Program mobilnosti MOBDOK 2023, financiran od Hrvatske zaklade za znanost

Literatura

- [1] Acary, V.: Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb’s friction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 256, 2013, pp. 224–250, DOI: 10.1016/j.cma.2012.12.012.
- [2] Mudrić, T., Čeh, N., Hante, S., Arnold, M.: Free rocking of a rigid block on a flexible structure with non-smooth contact dynamics, *Applied Sciences*, vol. 14, br. 15, 2024, art. 6483, DOI: 10.3390/app14156483.

- [3] J. J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177(3-4):329349, 1999.
- [4] R. W. (Ray W.) Clough and Joseph Penzien. Dynamics of structures. CBS Publishers & Distributors Pvt Ltd, India, 2nd editio edition, 2015.
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, 6. izd., Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.